

Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.

Занятие №10. Движение в центральном поле: задача двух тел в квантовой механике, плоский ротатор, пространственный ротатор.

1. Проверка д/з.

Задачи 1-2. Вычислить коммутаторы $[L_x^2, y^2]$, $[l_+, l_-]$

Задача 3. Найти среднее значение $\langle \hat{l}_x \hat{l}_z \rangle$ в состоянии ψ_m с определенным значением проекции момента m на ось z .

2. Задача двух тел

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + U(|\hat{r}_1 - \hat{r}_2|)$$

в квантовой механике, как и в классической механике, приводится к задаче о движении в центральном поле

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + U(r), \text{ где}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ – радиус-вектор центра инерции двух частиц}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ – радиус вектор относительного движения двух частиц.}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ – приведенная масса двух частиц.}$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow \psi(\vec{R}, \vec{r}) = \psi(\vec{R})\psi(\vec{r}), \quad \psi(\vec{R}) = \exp(i\vec{K}\vec{R}).$$

2.1. Гамильтониан частицы, которая движется в центральном поле

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right] + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2\mu r^2} + U(r);$$

$$\Delta_{\theta\varphi} = \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] = -\hat{l}^2.$$

Коммутационные соотношения для $\hat{H}, \hat{l}^2, \hat{l}_z$:

$$\left[\hat{H}, \hat{l}^2 \right] = 0, \quad \left[\hat{H}, \hat{l}_z \right] = 0, \quad \left[\hat{l}^2, \hat{l}_z \right] = 0.$$

Разделение переменных: $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

2.2. Уравнение для радиальной части волновой функции $R(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + U_{eff.}(r)R(r) = ER(r);$$

$$U_{eff.} = U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}.$$

Задача 4. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции плоского ротатора с

гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{l}_z^2}{2I}$, $I = \mu a^2$. (ГКК № 4.1)

Задача 5. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции пространственного

ротатора с гамильтонианом $\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2I}$, $I = \mu a^2$. (ГКК № 4.3)

Домашнее задание ГКК № 3.37, 4.28, 4.33.

Задача 1. Имеются две слабо взаимодействующие системы 1 и 2, состояния которых характеризуются квантовыми числами (l_1, m_1) и (l_2, m_2) момента и его проекции на ось z.

Указать возможные значения полного момента L совокупной системы $(l+2)$ и вычислить средние значения $\overline{\hat{L}}$ и $\overline{\hat{L}^2}$ в рассматриваемом состоянии. (ГКК № 3.37)

Задача 2. В основном состоянии водородоподобного атома (иона) найти для электрона $\overline{r^n}$. (ГКК № 4.28)

Задача 3. Найти уровни энергии $E_{n,l}$ и волновые функции $\psi_{n,l,m}$ стационарных состояний частицы в бесконечно глубокой сферической яме

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ \infty, & r > a. \end{cases} \quad (\text{ГКК № 4.33})$$

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984